# Mathematik

# Abiturprüfung 2024

## Prüfungsteil A (CAS)

Arbeitszeit: 80 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

| |
|---|
| ______________________________ |
| Name des Prüflings |

**Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.**

## Analysis

## Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

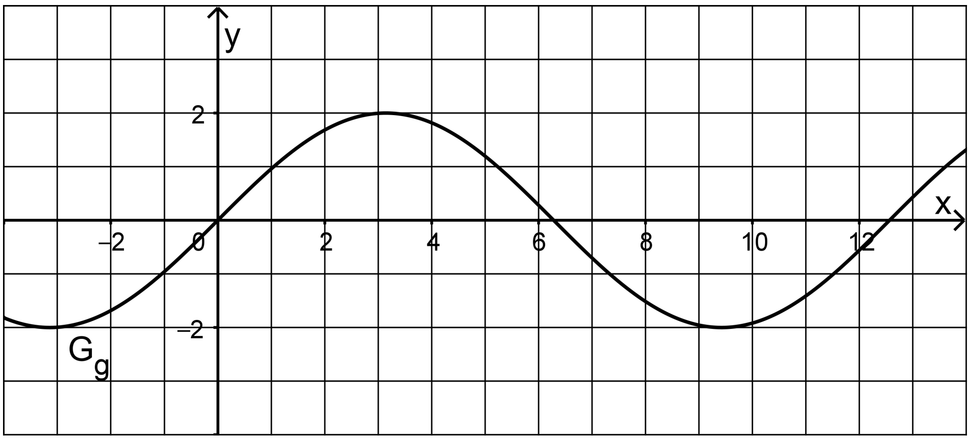
*BE*

**1** Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 8x^3 + 3x$ mit der Ableitungsfunktion $f'$.

*2* **a)** Berechnen Sie $f'(1)$.

*3* **b)** Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion F von f, deren Graph durch den Punkt $(-1|5)$ verläuft.

**2** Die Abbildung zeigt den Graphen $G_g$ der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.




*2* **a)** Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung, ob der Wert des Integrals $\int_{-2}^{8} g(x)\,dx$ negativ ist.

*3* **b)** Weisen Sie rechnerisch nach, dass die folgende Aussage zutrifft:

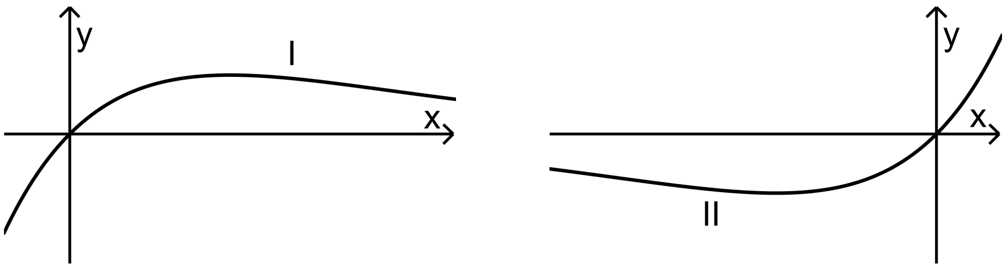
*Die Tangente an $G_g$ im Koordinatenursprung ist die Gerade durch die Punkte $(-1|-1)$ und $(1|1)$.*

*(Fortsetzung nächste Seite)*

**3** Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a$ mit $f_a(x) = x \cdot e^{ax}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für jeden Wert von a besitzt die Funktion $f_a$ genau eine Extremstelle.

2 **a)** Begründen Sie, dass der Graph von $f_a$ für $x < 0$ unterhalb der x-Achse verläuft.

3 **b)** Die abgebildeten Graphen I und II sind Graphen der Schar; einer der beiden gehört zu einem positiven Wert von a. Entscheiden Sie, welcher Graph dies ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.




2 **4** **a)** Geben Sie einen Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g an, die den Wertebereich $[-2;4]$ hat.

3 **b)** Geben Sie einen Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h an, sodass der Term $\sqrt{h(x)}$ genau für $x \in [-2;4]$ definiert ist. Erläutern Sie die Ihrer Angabe zugrunde liegenden Überlegungen.

20

## Analysis

### Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

*BE*

**1** Gegeben ist die in $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2-9}{x+2}$.

2 **a)** Geben Sie die Nullstellen von f sowie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse an.

2 **b)** Geben Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ sowie für $x \to +\infty$ an.

**2** Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(x) = x^3 + x^2$. Abbildung 1 zeigt den Graphen von g.

1 **a)** Geben Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von g an.

4 **b)** Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von g mit der x-Achse einschließt.

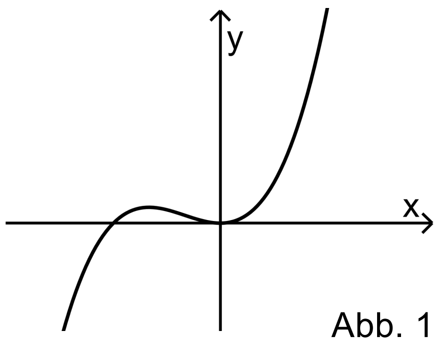



Abb. 1

**3** Gegeben ist die in $[-3;+\infty[$ definierte Funktion $h: x \mapsto \sqrt{x+3} - 2$.

2 **a)** Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $w: x \mapsto \sqrt{x}$ hervorgeht.

4 **b)** Begründen Sie, dass h umkehrbar ist, und beschreiben Sie, wie der Graph der Umkehrfunktion $h^{-1}$ von h aus dem Graphen von h hervorgeht.

Geben Sie den Definitions- und den Wertebereich von $h^{-1}$ an.

*(Fortsetzung nächste Seite)*

**4** Gegeben ist für jede positive reelle Zahl a die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f_a$ mit $f_a(x) = ax^2$. Abbildung 2 zeigt den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ sowie die Tangente t an den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ im Punkt $\left(4 \mid f_{\frac{1}{2}}(4)\right)$.

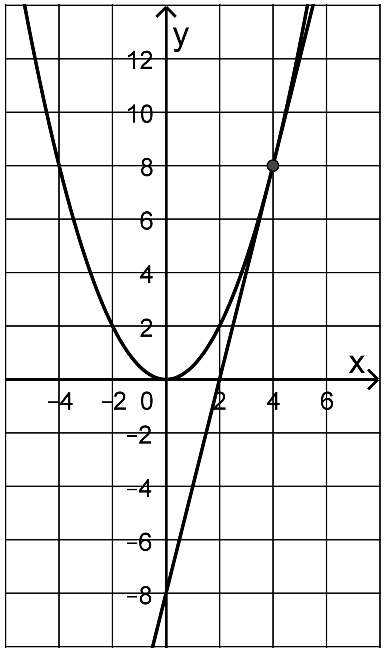


Abb. 2

1 **a)** Geben Sie anhand von Abbildung 2 eine Gleichung der Tangente t an.

4 **b)** Weisen Sie nach, dass für jeden Wert $u \in \mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen von $f_a$ im Punkt $(u \mid f_a(u))$ die y-Achse im Punkt $(0 \mid -f_a(u))$ schneidet.

20

## Stochastik

## Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

*BE*

Bei einem Spiel wird ein Würfel einmal geworfen und ein Glücksrad einmal gedreht. Die Seiten des Würfels sind mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert. Das Glücksrad hat zehn gleich große Sektoren, die mit den Zahlen von 1 bis 10 durchnummeriert sind. Man gewinnt das Spiel, wenn die mit dem Glücksrad erzielte Zahl kleiner ist als die mit dem Würfel erzielte Zahl, andernfalls verliert man das Spiel.

*3* **a)** Zeigen Sie rechnerisch, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, das Spiel zu gewinnen, $\frac{1}{4}$ beträgt.

*2* **b)** Das Spiel wird fünfmal gespielt. Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$ berechnet werden kann.

*5*

## Stochastik

## Aufgabengruppe 2

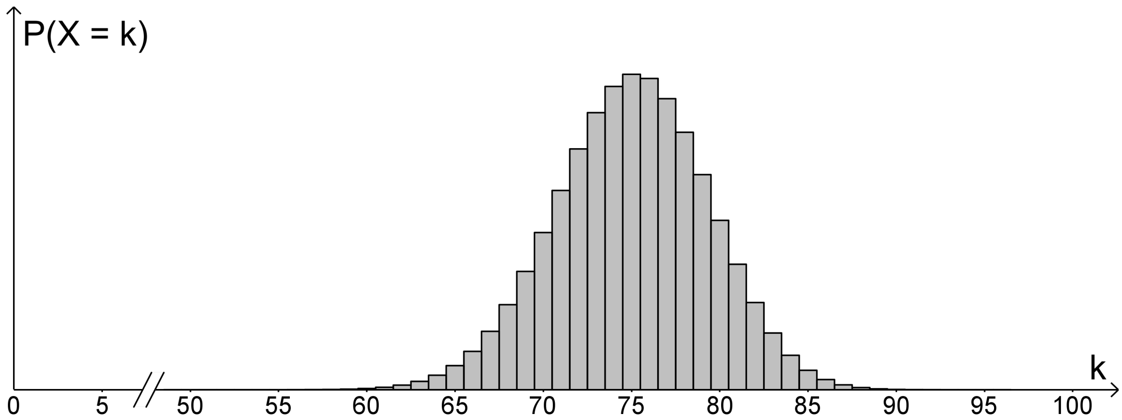
Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

*BE*

Ein Glücksrad ist in 20 gleich große Sektoren unterteilt, die entweder blau oder gelb eingefärbt sind. Das Glücksrad wird 100-mal gedreht. Die binomialverteilte Zufallsgröße X beschreibt, wie oft dabei die Farbe „Blau“, die binomialverteilte Zufallsgröße Y, wie oft dabei die Farbe „Gelb“ erzielt wird.

2 **a)** Begründen Sie, dass X und Y die gleiche Standardabweichung haben.

3 **b)** Der Erwartungswert von X ist ganzzahlig. Die Abbildung zeigt Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.




Bestimmen Sie die Anzahl der blauen Sektoren des Glücksrads.

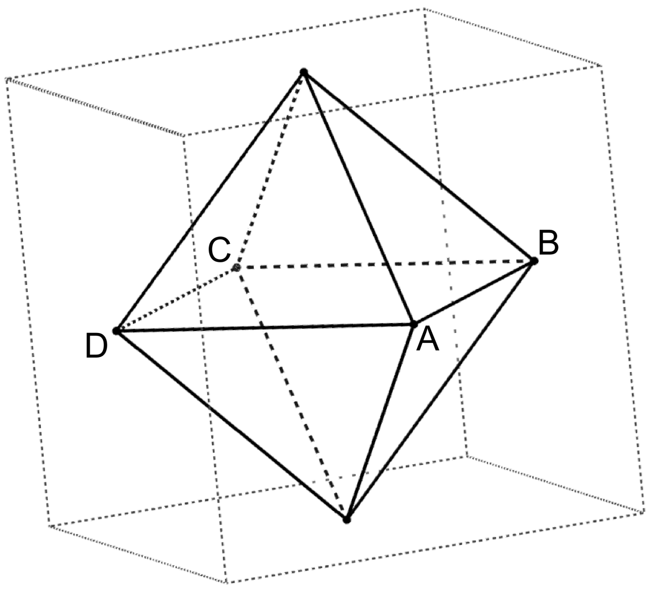
5

## Geometrie

## Aufgabengruppe 1 und Aufgabengruppe 2

*BE*

Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte eines Oktaeders (vgl. Abbildung). Die Eckpunkte $A(1|2|1)$, B, $C(-3|-6|9)$ und D des Oktaeders liegen in der Ebene H mit der Gleichung $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 6 = 0$.




2 **a)** Weisen Sie nach, dass die Kantenlänge des Würfels 12 beträgt.

3 **b)** Bestimmen Sie die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte des Oktaeders, die nicht in H liegen.

5