Mathematik

Abiturprüfung 2024

Prüfungsteil B (CAS)

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht,
- **ein Computeralgebrasystem, das den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.**

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

____
Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

1 Eine Seilbahn an einem Berg führt im unteren Abschnitt von der Talstation bis zu einer Seilstütze, im anschließenden oberen Abschnitt von der Seilstütze bis zur Bergstation. Der untere Abschnitt erstreckt sich 1000 m in horizontaler Richtung, der obere Abschnitt 3000 m.

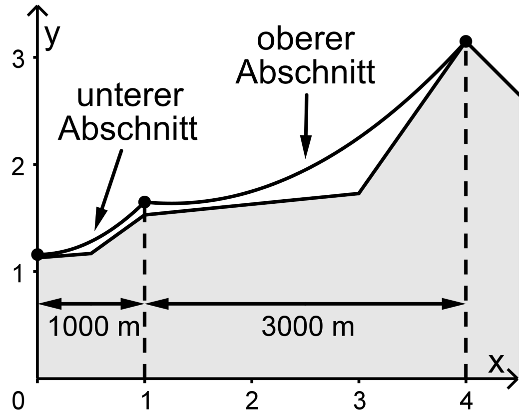


Abb. 1

Abbildung 1 zeigt schematisch den Verlauf des Tragseils der Seilbahn sowie den darunter liegenden Querschnitt des Bergs. Im verwendeten Koordinatensystem ist x die horizontale Entfernung von der Talstation in Kilometern und y die Höhe über dem Meeresspiegel in Kilometern.

Im unteren Abschnitt, d. h. für $0 \leq x \leq 1$, wird der Seilverlauf durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 0{,}34x^2 + 0{,}15x + 1{,}16$ beschrieben.

2 **a)** Bestimmen Sie den Höhenunterschied, den eine Kabine der Seilbahn auf dem unteren Abschnitt überwindet.

3 **b)** Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem das Seil im unteren Abschnitt auf die vertikal stehende Seilstütze trifft.

Im oberen Abschnitt, d. h. für $1 \leq x \leq 4$, wird der Seilverlauf durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g: x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ beschrieben.
Die maximale Steigung des Seilverlaufs im oberen Abschnitt beträgt 110 %.
Das Seil ist in der Bergstation in einer Höhe von 3150 m über dem Meeresspiegel aufgehängt.

4 **c)** Bestimmen Sie die Werte von a, b und c.

(zur Kontrolle: $a = 0{,}2$; $b = -0{,}5$; $c = 1{,}95$)

2 **d)** Ermitteln Sie die mittlere Steigung des Seilverlaufs im oberen Abschnitt.

3 **e)** Berechnen Sie die horizontale Entfernung von der Seilstütze bis zu derjenigen Stelle im oberen Abschnitt des Seilverlaufs, an der die Steigung des Seilverlaufs 50% beträgt.

4 **f)** In einer Kabine der Seilbahn befindet sich ein Höhenmesser, der die aktuelle Höhe über dem Meeresspiegel misst. Begründen Sie rechnerisch, dass sich im unteren Abschnitt der horizontale Abstand zur Talstation anhand der Höhe eindeutig bestimmen lässt, jedoch nicht im oberen Abschnitt.

(Fortsetzung nächste Seite)

5 **g)** Die mittlere Geschwindigkeit der Kabine während der Fahrt zwischen Tal- und Bergstation beträgt 7 Meter pro Sekunde. Bestimmen Sie unter Verwendung des folgenden Hinweises die Dauer einer Fahrt von der Tal- bis zur Bergstation in Minuten.

Hinweis: Ist ein Kurvenstück Graph einer in $[x_1; x_2]$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ definierten Funktion r mit erster Ableitungsfunktion r', so gilt für die Länge L dieses Kurvenstücks: $L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(r'(x)\right)^2}\, dx$.

Das Hangprofil unterhalb der Seilbahn wird im Modell für den Bereich $1 \leq x \leq 3$ durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto 0{,}1x + 1{,}43$ beschrieben. Zu diesem Teil des Hangprofils weist das darüberliegende Seil an einer Stelle eine minimale Höhendifferenz auf.

3 **h)** Berechnen Sie diese minimale Höhendifferenz.

5 **i)** Begründen Sie geometrisch, dass diese minimale Höhendifferenz nicht gleich dem Abstand der betrachteten Position im Seilverlauf zum Hangprofil unterhalb der Seilbahn ist, und beschreiben Sie, wie man diesen Abstand rechnerisch ermitteln kann.

2 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktionen $s_k: x \mapsto \ln\left(\frac{k}{x}\right)$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.

3 **a)** Begründen Sie, dass jede Stammfunktion der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $v: x \mapsto -\frac{1}{x}$ eine der Funktionen s_k ist.

6 **b)** Abbildung 2 zeigt für einen bestimmten Wert von k den Graphen von s_k sowie den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $p: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 1$. Für diesen Wert von k schneiden sich der Graph von s_k und der Graph von p in zwei Punkten, von denen einer die x-Koordinate 0,25 hat. Die Gerade durch diese beiden Schnittpunkte zerlegt das von den beiden Graphen eingeschlossene Flächenstück in zwei Teile.

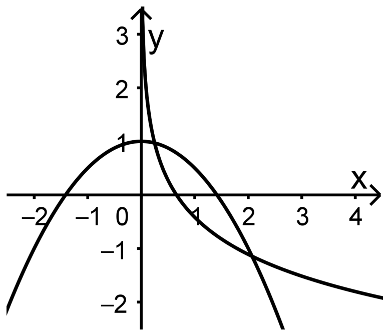


Abb. 2

Bestimmen Sie durch Rechnung näherungsweise das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Teile.

(zur Kontrolle: $k = 0{,}25 \cdot e^{\frac{31}{32}}$)

40

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

1 Ein mit Wasser befülltes Glas wird aus einem Kühlschrank genommen. Die anschließende Entwicklung der Wassertemperatur infolge der höheren Raumtemperatur lässt sich mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: t \mapsto 25 - 20e^{-0{,}014t}$ modellhaft beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Minuten, die seit der Entnahme aus dem Kühlschrank vergangen ist, und $f(t)$ die Wassertemperatur in °C. Die Raumtemperatur beträgt konstant 25 °C.

3 **a)** Geben Sie die Wassertemperatur zum Zeitpunkt der Entnahme aus dem Kühlschrank an. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wassertemperatur 12 °C beträgt.

4 **b)** Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Wassertemperatur innerhalb der ersten 30 Minuten. Berechnen Sie $f'(30)$ und geben Sie die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang an.

4 **c)** Ausgehend von einem beliebigen Zeitpunkt t^* dauert es eine gewisse Zeit, bis die Wassertemperatur den Mittelwert zwischen der Temperatur zum Zeitpunkt t^* und der Raumtemperatur angenommen hat. Zeigen Sie, dass diese Zeitdauer unabhängig von t^* ist.

Bei einem anderen Vorgang wird die Entwicklung der Temperatur von Wasser in einem zweiten Glas durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g: t \mapsto 5 + 20e^{-0{,}014t}$ modellhaft beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten und $g(t)$ die Wassertemperatur in °C. Bei den durch f und g beschriebenen Vorgängen sind die durch $t = 0$ festgelegten Zeitpunkte identisch.

2 **d)** Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f erzeugt werden kann.

4 **e)** Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen:

I Die Temperatur des Wassers im zweiten Glas nimmt während des gesamten Beobachtungszeitraums ab.

II Für beide Gläser stimmen zu jedem Zeitpunkt die Beträge der momentanen Änderungsraten der Wassertemperaturen überein.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit $h(x) = \left(1 - x^2\right) \cdot e^x$. Der Graph von h wird mit H bezeichnet.

3 **a)** Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to -\infty$ an und begründen Sie Ihre Angabe anhand des Funktionsterms.

3 **b)** Es gibt eine Zahl $b > 1$, sodass die Fläche, die H, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = b$ im vierten Quadranten einschließen, den gleichen Inhalt hat wie die Fläche, die H mit der x-Achse im ersten und zweiten Quadranten einschließt. Bestimmen Sie b.

5 **c)** Gegeben ist die in $\left]-\infty; -1\right]$ definierte Funktion k mit $k(x) = \int\limits_x^{-1} h(t)\,dt$. Ihr Graph wird mit K bezeichnet. Abbildung 1 zeigt H und K. Für $x \to -\infty$ kommt K der Gerade mit der Gleichung $y = -\frac{4}{e}$ beliebig nahe.

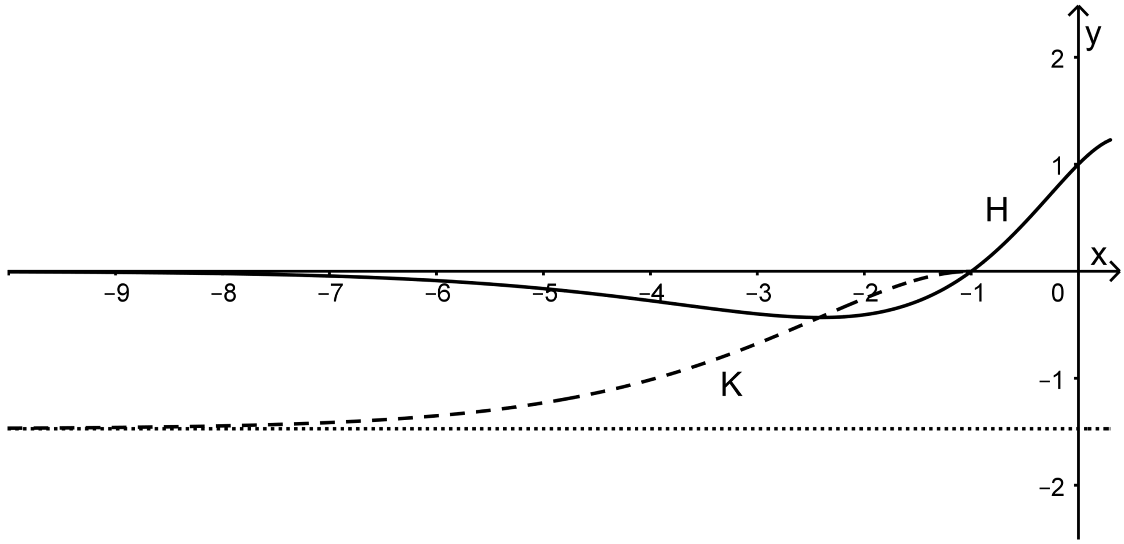


Abb. 1

Begründen Sie mithilfe des Funktionsterms, dass k die Nullstelle -1 besitzt und dass K im Bereich $x < -1$ unterhalb der x-Achse verläuft. Deuten Sie damit unter Verwendung von Abbildung 1 den Wert $-\frac{4}{e}$ in Bezug auf H geometrisch.

Die Funktion h gehört zur Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen h_a mit $h_a(x) = \frac{1}{a} \cdot \left(a - x^2\right) \cdot e^x$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von h_a wird mit H_a bezeichnet.

3 **d)** Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ die Funktionswerte von h_a genau für $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ positiv sind.

5 **e)** Es gibt einen Wert von a, sodass das Produkt der x-Koordinaten der beiden Extrempunkte von H_a gleich dem Produkt der y-Koordinaten dieser beiden Punkte ist.

Berechnen Sie diesen Wert von a.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 **f)** Die Schnittpunkte von H_a mit der x-Achse und der Hochpunkt von H_a sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Dieses Dreieck rotiert um die x-Achse.

Die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion v gibt das Volumen dieses Rotationskörpers in Abhängigkeit von a an. Abbildung 2 zeigt drei Graphen G_1, G_2 und G_3, von denen einer die Ableitungsfunktion v' von v darstellt.

Beurteilen Sie ohne Rechnung und unter Verwendung der Tatsache, dass die y-Koordinate des Hochpunkts von H_a umso größer ist, je größer der Wert von a ist, welcher Graph dies ist.

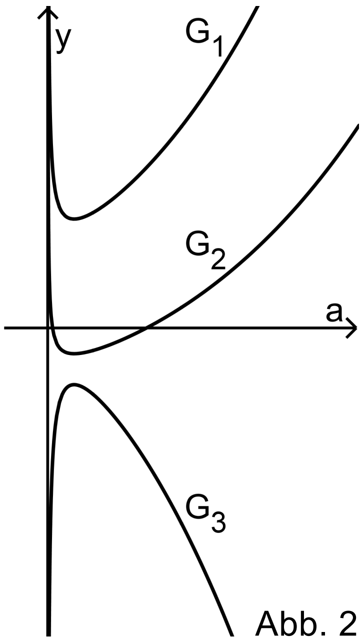


Abb. 2

40

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

1 In den letzten Jahren hat der Onlinehandel stark zugenommen. Dies zeigt sich auch in den Versandzentren der Paketdienstleister. Im Folgenden werden nur die im Zusammenhang mit dem Onlinehandel verschickten Pakete in einem dieser Versandzentren betrachtet. Ein Fünftel dieser Pakete sind Retouren, d. h. Pakete, die zurückgeschickte Waren enthalten.

3 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 200 zufällig ausgewählten Paketen mehr als ein Fünftel und weniger als ein Viertel Retouren sind.

3 **b)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term

$1-\sum_{i=0}^{8}\binom{30}{i}\cdot 0{,}2^{i}\cdot 0{,}8^{30-i}$ berechnet werden kann, und geben Sie dieses

Ereignis an.

4 **c)** Ermitteln Sie, wie viele Pakete mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter mindestens eine Retoure ist, größer als 90 % ist.

5 **d)** 49 % der Pakete enthalten Kleidung. Von den Paketen, bei denen es sich um Retouren handelt, enthalten 91 % Kleidung.

Es wird ein Paket zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

R: „Bei dem Paket handelt es sich um eine Retoure.“

K: „Das Paket enthält Kleidung.“

Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. Bestimmen Sie für den Fall, dass das ausgewählte Paket keine Retoure ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Paket Kleidung enthält.

Aus einer Transportkiste mit 25 Paketen, unter denen sechs Retouren sind, werden nacheinander zehn Pakete zufällig entnommen und an eine Prüfstelle weitergeleitet.

2 **e)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten beiden Pakete Retouren sind.

4 **f)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei oder drei Retouren entnommen werden.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 **2** Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X, die nur die Werte 1, 2, 3, 4 und 5 annehmen kann.

k	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	p_1	p_2	p_3	0,2	0,15

Die Wahrscheinlichkeiten $P(X=4)$ und $P(X=5)$ sowie der Erwartungswert und die Varianz von X sind bekannt. Aus diesen Informationen ergibt sich das folgende Gleichungssystem, mit dem die fehlenden Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2 und p_3 berechnet werden können.

I $\quad p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}65$

II $\quad p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 1{,}45$

III $\quad 4p_1 + p_2 = 0{,}6$

Ermitteln Sie, ohne das Gleichungssystem zu lösen, welche Werte für den Erwartungswert und die Varianz von X beim Aufstellen des Gleichungssystems verwendet worden sind.

25

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

Ein bekannter Video-Streamingdienst bietet einen kostenpflichtigen Zugang zu Spielfilmen und Serien an. Personen, die davon gegen Zahlung einer monatlichen Gebühr Gebrauch machen, werden im Folgenden als Abonnenten bezeichnet. Sie haben sich entweder für das Spielfilmpaket oder für das Komplettpaket entschieden, das neben den Spielfilmen auch noch Serien enthält.

1 Unter den Abonnenten sind 70 % höchstens 40 Jahre alt. Von diesen haben 80 % das Komplettpaket gewählt. Unter denjenigen Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind, haben sich 50 % für das Komplettpaket entschieden.

3 **a)** Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

3 **b)** Eine unter allen Abonnenten zufällig ausgewählte Person hat sich für das Komplettpaket entschieden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie höchstens 40 Jahre alt ist.

4 **c)** Bestimmen Sie die Anzahl der Abonnenten, die man mindestens zufällig auswählen müsste, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mehr als 20 Personen älter als 40 Jahre sind.

2 Der Anteil der zufriedenen Abonnenten von derzeit 60 % soll gesteigert werden. Dazu wird ein Algorithmus entwickelt, der jedem Abonnenten täglich individuell einen Spielfilm vorschlägt. Als Basis für die Entscheidung über den dauerhaften Einsatz des Algorithmus plant das Management einen Probebetrieb. Im Anschluss soll die Nullhypothese „Der Anteil der zufriedenen Abonnenten beträgt höchstens 60 %.“ mithilfe einer Stichprobe von 200 zufällig ausgewählten Abonnenten auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

2 **a)** Geben Sie an, welche Überlegung des Managements zur Wahl dieser Nullhypothese geführt haben könnte.

(Fortsetzung nächste Seite)

Für den beschriebenen Test ergibt sich $\{132;133;\ldots;200\}$ als Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

4 **b)** Zur Bestimmung der unteren Grenze dieses Ablehnungsbereichs wurden zunächst folgende Lösungsschritte ausgeführt:

- Y: Anzahl der zufriedenen Abonnenten in der Stichprobe
- $P_{0,6}^{200}(Y \geq 132) \approx 0{,}047$

Begründen Sie, dass die beiden Lösungsschritte zur Bestimmung der unteren Grenze nicht ausreichend sind, und ergänzen Sie diese geeignet.

4 **c)** Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art bei diesem Ablehnungsbereich der Nullhypothese mehr als 90 % betragen könnte.

3 Zur Anmeldung auf der Webseite des Streamingdiensts ist ein persönliches Kennwort erforderlich. Für das Kennwort können 80 verschiedene Zeichen verwendet werden: je 26 Groß- und Kleinbuchstaben, 10 Ziffern sowie 18 Sonderzeichen.

2 **a)** Einige Abonnenten verwenden ein Kennwort, das genau acht Zeichen lang ist und nur aus Kleinbuchstaben besteht. Dabei können Zeichen mehrfach vorkommen. Zeigen Sie, dass für diese Abonnenten weniger als ein Tausendstel aller möglichen Kennwörter infrage kommen, die aus genau acht Zeichen bestehen.

3 **b)** Niclas beschließt, ein Kennwort zu wählen, das die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- Es besteht aus genau acht Zeichen, die untereinander verschieden sind.
- Die Buchstaben seines Namens sind in der korrekten Reihenfolge und unter Berücksichtigung der Groß- und Kleinschreibung enthalten.

Damit sind beispielsweise *Nic4+las* oder *nNicl*as* mögliche Kennwörter. Bestimmen Sie die Anzahl aller derartigen Kennwörter.

25

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

Gegeben sind die Punkte $A(8|0|6)$, $B(7|1|6)$ und $S(0|0|10)$, die in der Ebene E liegen.

2 **a)** Berechnen Sie die Länge der Strecke $[AB]$ und geben Sie die besondere Lage dieser Strecke im Koordinatensystem an.

(zur Kontrolle: $\overline{AB} = \sqrt{2}$)

3 **b)** Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $E: x_1 + x_2 + 2x_3 - 20 = 0$)

Betrachtet werden die Schar der Geraden $g_k : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$ sowie der Punkt $C(9|1|5)$.

3 **c)** Begründen Sie, dass jede Gerade der Schar in E liegt, und bestimmen Sie denjenigen Wert k, für den der Punkt C auf g_k liegt.

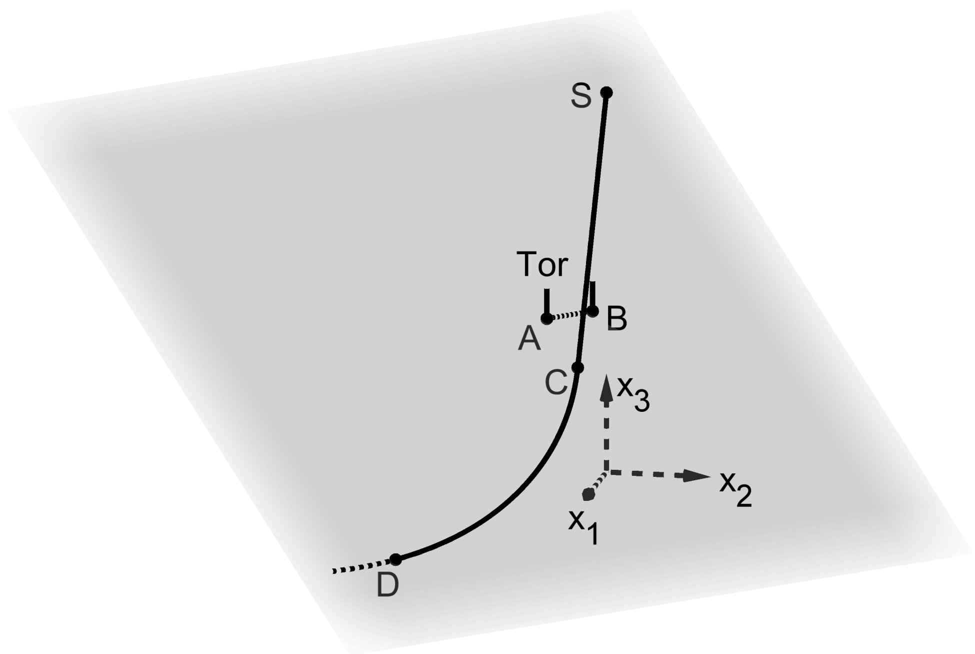
(zur Kontrolle: $k = 0{,}8$)

2 **d)** Begründen Sie, dass keine Gerade der Schar parallel zu einer der Koordinatenachsen ist.

5 **e)** Begründen Sie, dass die Größe des Schnittwinkels von g_k und der x_1x_2-Ebene weniger als 30° beträgt, wenn $2k^2 > 1$ gilt.

Eine Skifahrerin fährt einen Hang hinab. Dieser wird modellhaft durch ein Flächenstück beschrieben, das in der Ebene E liegt. Die Startposition der Abfahrt entspricht dem Punkt S. Auf dem Hang befindet sich ein Tor, dessen Begrenzungsstangen im Modell an den Punkten A und B stehen. Von ihrer Startposition fährt die Skifahrerin zunächst entlang einer geraden Fahrlinie bis zu einer Stelle unterhalb des Tors, die dem Punkt C entspricht (vgl. Abbildung).

(Fortsetzung nächste Seite)



Die gerade Fahrlinie liegt dabei im Modell auf der Gerade

$g_{0,8}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 0{,}2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Die x_1x_2-Ebene beschreibt die Horizontale; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 5 Metern in der Realität.

3 **f)** Geben Sie mithilfe des Ergebnisses aus Aufgabe a die Breite des Tors auf Meter genau an. Begründen Sie mithilfe der Aussage aus Aufgabe e, dass die gerade Fahrlinie der Skifahrerin um weniger als 30° gegenüber der Horizontalen geneigt ist.

4 **g)** Begründen Sie rechnerisch, dass die Skifahrerin das Tor tatsächlich durchquert.

3 **h)** An der Stelle, die im Modell dem Punkt C entspricht, wird die Fahrlinie der Skifahrerin ohne Knick durch eine kreisbogenförmige Kurve fortgesetzt. Während der Fahrt entlang dieser Kurve erreicht die Skifahrerin eine Stelle, die dem Punkt $D(18\,|\,-2\,|\,2)$ entspricht.

Der Kreisbogen, der diese Kurve beschreibt, ist Teil eines Kreises mit Mittelpunkt $M(m_1\,|\,m_2\,|\,m_3)$. Die Koordinaten von M können mit folgendem Gleichungssystem ermittelt werden.

I $\quad m_1 + m_2 + 2m_3 - 20 = 0$

II $\quad \begin{pmatrix} m_1 - 9 \\ m_2 - 1 \\ m_3 - 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 0{,}2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

III $\quad \sqrt{(m_1-9)^2 + (m_2-1)^2 + (m_3-5)^2} = \sqrt{(m_1-18)^2 + (m_2+2)^2 + (m_3-2)^2}$

Erläutern Sie die geometrischen Überlegungen, die den Gleichungen I, II und III zugrunde liegen.

25

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Abbildung 1 zeigt die Pyramide ABCDS mit den Eckpunkten $A(-3|-3|0)$, $B(3|-3|0)$, $C(3|3|0)$, $D(-3|3|0)$ und $S(0|0|4)$ sowie den Punkt $O(0|0|0)$, der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt. Die Seitenfläche CDS der Pyramide liegt in der Ebene E.

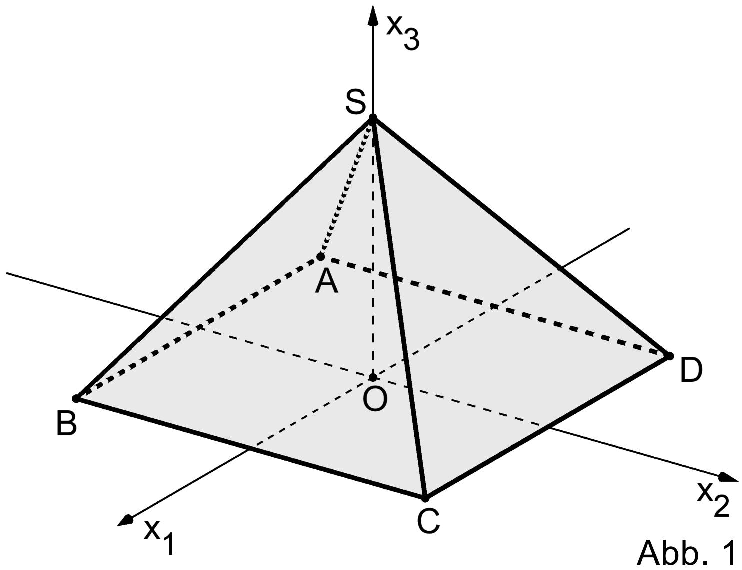


Abb. 1

4 **a)** Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide.

3 **b)** Genau eine der folgenden Gleichungen (1) bis (3) beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide. Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist.

(1) $x_1 - x_3 = 0$ (2) $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ (3) $x_1 + x_2 = 0$

3 **c)** Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $4x_2 + 3x_3 - 12 = 0$)

5 **d)** Es gibt einen Punkt $P(0|0|p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat. Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen:

$$\text{I}\quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{II}\quad 4 \cdot 4t + 3 \cdot (p + 3t) - 12 = 0 \qquad \text{III}\quad \left|\overrightarrow{PQ}\right| = p$$

Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen.

(Fortsetzung nächste Seite)

Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen

$E_k: 4k \cdot x_1 + 4\sqrt{1-k^2} \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 12 = 0$ mit $k \in [-1;1]$.

Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E_1.

1 **e)** Zeigen Sie, dass der Punkt S in allen Ebenen der Schar enthalten ist.

4 **f)** Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E_k schneidet, unabhängig von k ist, und bestimmen Sie diese Größe.

Hinweis: Unter Umständen liefert das CAS bei einem Rechenschritt keine hilfreiche Ausgabe. Führen Sie ggf. die Berechnung ohne CAS durch.

Jede Ebene E_k der Schar schneidet die x_1x_2-Ebene in einer Gerade g_k. Mit R_k wird jeweils derjenige Punkt auf g_k bezeichnet, der von O den kleinsten Abstand hat. In Abbildung 2 sind g_k und R_k beispielhaft für eine Ebene E_k der Schar dargestellt.

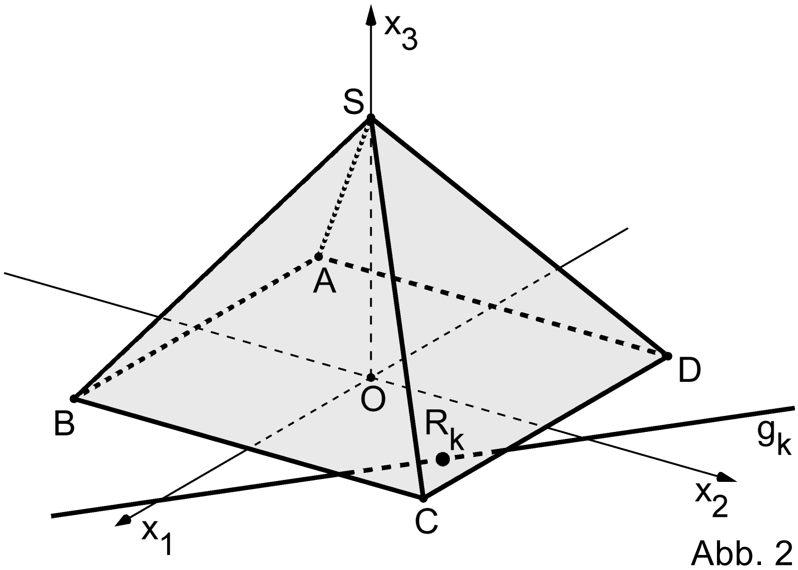


Abb. 2

2 **g)** Zeichnen Sie die Punkte R_{-1} und R_1 in Abbildung 2 ein.

3 **h)** Durchläuft k alle Werte von -1 bis 1, dann dreht sich das Dreieck OR_kS um die Strecke $[OS]$. Dabei entsteht ein Körper. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers und bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.

25