Besondere Prüfung 2024

Mathematik

Arbeitszeit: 120 Minuten

____

Name des Prüflings

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden:

- das vom Staatsministerium genehmigte Dokument mit mathematischen Formeln,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen mathematisch-naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

BE

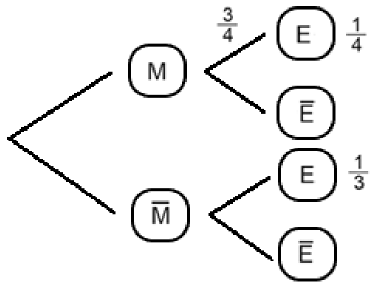
1) Eine Aufnahmeprüfung einer Schule besteht aus einem Mathematiktest und einem Englischtest. Aus allen Prüflingen des Jahres 2023 wird einer zufällig ausgewählt.

Es werden folgende Ereignisse betrachtet:

M: „Der Prüfling hat den Mathematiktest bestanden.“

E: „Der Prüfling hat den Englischtest bestanden.“

Die Abbildung zeigt ein zugehöriges Baumdiagramm. Einige Wahrscheinlichkeiten sind bereits eingetragen.



4 a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(M)$ und $P(\overline{E})$.

1 b) Beschreiben Sie das Ereignis $(M \cap \overline{E}) \cup (\overline{M} \cap E)$ in Worten.

2) Die Trefferwahrscheinlichkeit eines Fußballers beim Elfmeterschießen beträgt anfangs 90 %. Bei einem Fehlschuss steigt seine Nervosität, dadurch verringert sich seine Trefferwahrscheinlichkeit nach jedem Fehlschuss um fünf Prozentpunkte. Beispielsweise beträgt die Trefferwahrscheinlichkeit nach dem ersten Fehlschuss nur noch 85 %. Bei einem Treffer bleibt die bis zu diesem Zeitpunkt erreichte Trefferwahrscheinlichkeit unverändert.

Dieser Fußballer schießt nacheinander drei Elfmeter.

1 a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er bei allen drei Elfmetern trifft.

2 b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er bei keinem der drei Elfmeter trifft.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

3) Am 31. Oktober 2022 wurde eine neue Variante des Influenzavirus entdeckt.

In der Stadt Aberszell waren 20 Tage nach der Entdeckung 30 Menschen mit dem Virus infiziert und 60 Tage nach der Entdeckung bereits 750 Menschen.

Die Anzahl der infizierten Personen in Aberszell in Abhängigkeit von der Zahl x der seit dem 31. Oktober 2022 vergangenen Tage wird durch die Funktion $f\colon x \mapsto b \cdot a^x$ mit $x \in \mathbb{R}_0^+$ modelliert.

4 a) Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b. Geben Sie dabei den Wert von a auf drei Dezimalen genau an. [zur Kontrolle: $f(x) = 6 \cdot 1{,}084^x$]

1 b) Geben Sie an, wie viele Personen am 31. Oktober 2022 in Aberszell infiziert waren.

In der Nachbarstadt Beutelsberg kann die Verbreitung der Virusvariante seit ihrer Entdeckung analog durch die Funktion $g\colon x \mapsto 4 \cdot 1{,}14^x$ mit $x \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben werden.

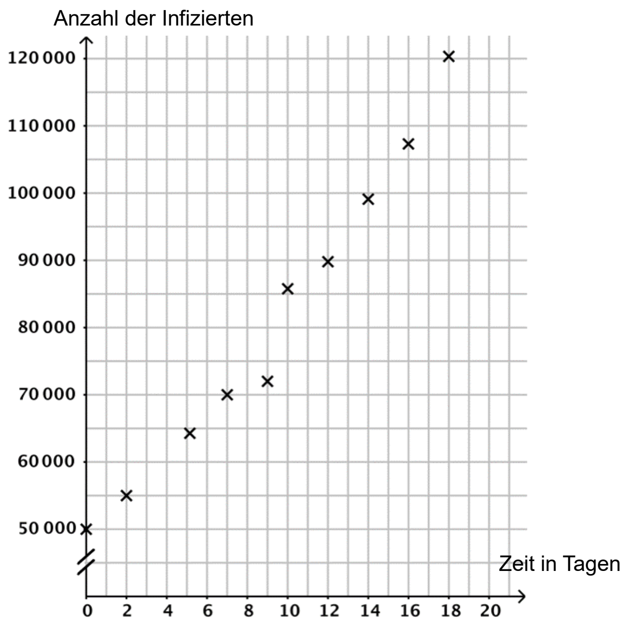
2 c) Bestimmen Sie, wie viele Tage nach der Entdeckung zum ersten Mal mehr als 1000 Personen in Beutelsberg mit der neuen Virusvariante infiziert waren.

3 d) Ermitteln Sie rechnerisch, an welchem Tag die Anzahl der Infizierten in Beutelsberg mit der Anzahl der Infizierten in Aberszell in etwa übereinstimmte.

3 e) Im Herbst 2023 traten deutschlandweit Infektionen mit einem ähnlichen Influenzavirus auf.

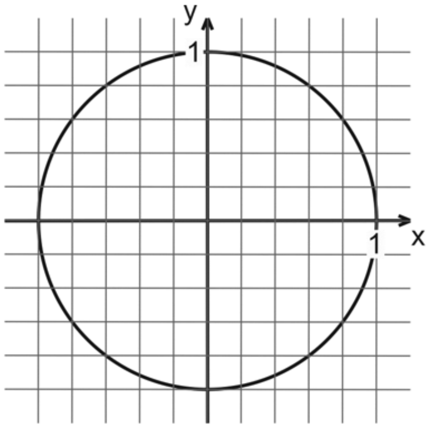
Die Abbildung zeigt ab einem bestimmten Tag den zeitlichen Verlauf der Anzahl der mit diesem Virus infizierten Personen.

Bestimmen Sie geeignete Werte der Parameter a und b einer in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $h\colon x \mapsto b \cdot a^x$, die diesen Sachverhalt modelliert, und geben Sie das tägliche prozentuale Wachstum an.



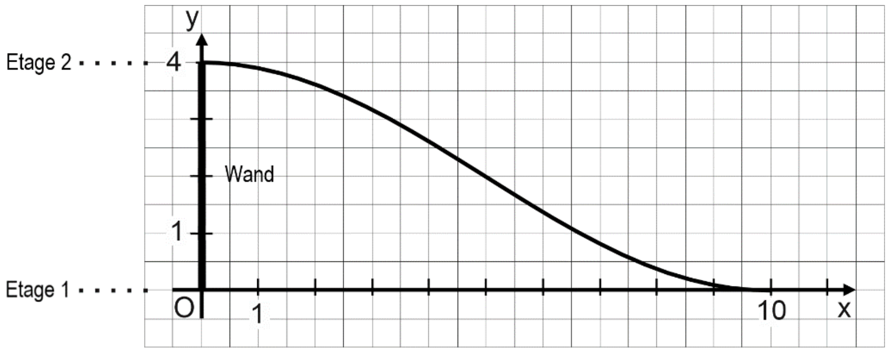
(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
3	4) a) Bestimmen Sie näherungsweise nur mithilfe geeigneter Eintragungen am nebenstehend abgebildeten Einheitskreis alle Winkel α im Intervall $[0°;\ 360°]$, für die $\cos(\alpha) = -0{,}4$ gilt.
1	b) Wandeln Sie den Winkel $67°$ ins Bogenmaß um und geben Sie das Ergebnis auf zwei Dezimalen genau an.



5) Die Abbildung unten zeigt schematisch den Fußlauf einer Rolltreppe, welche die Etagen 1 und 2 eines Gebäudes verbindet. Dabei überwindet die Rolltreppe entlang einer horizontalen Distanz von $10\ m$ eine Höhendifferenz von $4\ m$. Die Übergänge zu den Etagen 1 und 2 erfolgen jeweils waagerecht; unterhalb des Übergangs zur Etage 2 befindet sich eine Wand (vgl. Abbildung).

Der Fußlauf soll für $0 \leq x \leq 10$ im Folgenden durch eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f modelliert werden. Eine Längeneinheit im Modell entspricht einem Meter in der Realität.



4 a) Begründen Sie, dass die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot x\right) + 2$ für die beschriebene Modellierung geeignet ist.

Im Folgenden wird die Funktion f aus Aufgabe 5a als Modell verwendet. Eine Person befindet sich auf der Rolltreppe.

2 b) Berechnen Sie, in welcher Höhe über der Etage 1 die Person steht, wenn sie einen Abstand von sechs Meter zur Wand hat.

4 c) Ermitteln Sie durch geeignete Eintragungen in der Abbildung, wie groß der Abstand der Person zur Wand ist, wenn sie in einer Höhe von $3\ m$ über der Etage 1 auf der Rolltreppe steht.

Berechnen Sie anschließend den Wert, der sich aus dem Modell ergibt, und geben Sie das Ergebnis auf Dezimeter genau an.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

6) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto (x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 - 3)$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

3 a) Begründen Sie, dass G_f weder symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs noch symmetrisch bezüglich der y-Achse ist.

5 b) Ermitteln Sie die Nullstellen von f und deren Vielfachheiten. Beschreiben Sie, was diese Vielfachheiten der Nullstellen über den Verlauf von G_f bei der jeweiligen Nullstelle aussagen.

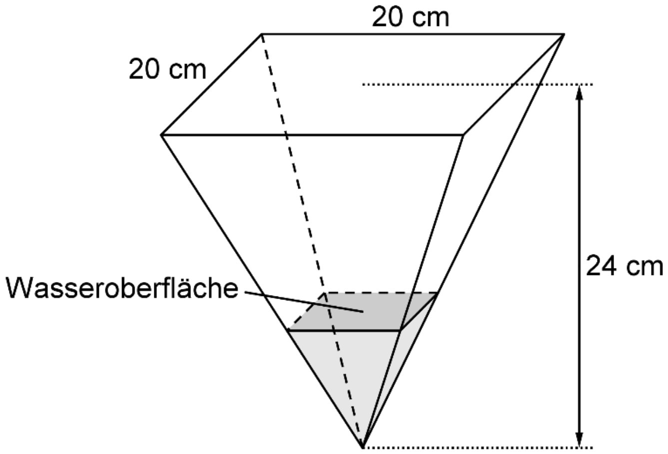
2 c) Tragen Sie in die Lücken jeweils das Wort „oben“ oder „unten“ ein, sodass eine richtige Aussage entsteht.

Der Graph von f verläuft von „links ____________“ nach „rechts ____________“.

4 7) Bestimmen Sie einen Funktionsterm einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f fünften Grades, die folgende Eigenschaften besitzt:

- -2 ist eine doppelte und 0 eine einfache Nullstelle von f. Dies sind die einzigen Nullstellen von f.
- Der Graph von f verläuft durch den Punkt $P(1|1)$.

8) Zur Bestimmung der Niederschlagsmenge wird ein Auffanggefäß für Regenwasser in Form einer auf der Spitze stehenden geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche verwendet. Dieses Auffanggefäß ist in der folgenden Abbildung (nicht maßstabsgetreu) dargestellt. Vor Beginn eines Regenschauers ist das Gefäß leer. Nach diesem Regenschauer steht das Wasser bis zu einer Höhe von $6\ cm$ im Gefäß.



4 a) Zeigen Sie mithilfe des Strahlensatzes, dass der Flächeninhalt der Wasseroberfläche im Auffanggefäß $25\ cm^2$ beträgt.

3 b) Begründen Sie, dass das Volumen des Wassers, das bei diesem Regenschauer auf einer Bodenfläche von $1\ m^2$ gefallen ist, durch den Term $\frac{10\,000}{400} \cdot \frac{1}{3} \cdot 25\ cm^2 \cdot 6\ cm$ berechnet werden kann.

4 c) Berechnen Sie das Volumen des Wassers, das noch zusätzlich zum vorhandenen Wasser in das Auffanggefäß eingefüllt werden kann, bis das Gefäß überläuft.

60